【教科書 P66 練習 20】（なぜ「同じ平面上にないから」の一言を書く必要があるのか）

授業での板書を再掲します（一部省略）.

点 M は直線 OH 上にあるので $\cdots$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b} + 2k\overrightarrow{c} \quad \cdots ①$$

また，点 M は平面 AFC 上にあるので $\cdots$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-s-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} + (s+t)\overrightarrow{c} \quad \cdots ②$$

3点O, A, B, Cは同じ平面上の点ではないので，①と②の $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ の係数を比較することで，

$$\begin{cases} k = 1-s-t \\ k = t \\ 2k = s+t \end{cases}$$

を得る．これを解くと $k = \dfrac{1}{3}$ となるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{c} \quad \cdots (\text{答})$$

授業では下線部「3点O, A, B, Cは同じ平面上の点ではない」については詳しく触れませんでした．なぜこの一言を書かねばならないのか，考察してみましょう．ところで，上の解答で実は誤魔化して記述した点があります．波線部分「①と②の $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ の係数を比較することで」の部分です．まずはここを誤魔化さずに（省略せずに）記述してみることから始めてみます．

波線部分の「省略しない」記述

① と ② より，

$$\begin{aligned} & k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b} + 2k\overrightarrow{c} = (1-s-t)\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} + (s+t)\overrightarrow{c} \\ \iff & \{k-(1-s-t)\}\overrightarrow{a} + (k-t)\overrightarrow{b} + \{2k-(s+t)\}\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

右辺がゼロベクトルということは，左辺の $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ の係数は 0 だから，

$$\begin{cases} k-(1-s-t) = 0 \\ k-t = 0 \\ 2k-(s+t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1-s-t \\ k = t \\ 2k = s+t \end{cases}$$

となります．このように記述し直すと，気になる点が一つあります．それは，

「右辺がゼロベクトルということは，左辺の $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ の係数は 0」

と言い切っている点です．$k-(1-s-t) = x,\ k-t = y,\ 2k-(s+t) = z$ と文字を置き換えて論理記号を用いて記述し直せば，

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \implies x = y = z = 0$$

と言い切っている，ということです．右辺がゼロベクトルなら左辺の係数らは必ず 0 ⋯ こう言い切れるでしょうか？他の可能性はないでしょうか？⋯実は**これは言い切れません！**反例はすぐに見つかります．$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が，<u>同じ平面上にある</u>ときを想像してみましょう（**図 1**）．**図 1** において，$\overrightarrow{c} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} \iff \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = 0$ と表せますから（**図 2**），$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ をみたす x, y, z として（$x = y = z = 0$ 以外にも）$x = \dfrac{1}{2},\ y = 2,\ z = -1$ が挙げられることになります．$x = y = z = 0$ とは限りません！このことから，係数が 0（$x = y = z = 0$）と結論するためには,「$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が，<u>同じ平面上にない</u>」と宣言しなくてはならないことが感じてもらえると思います．

図1

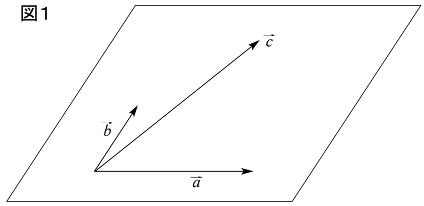
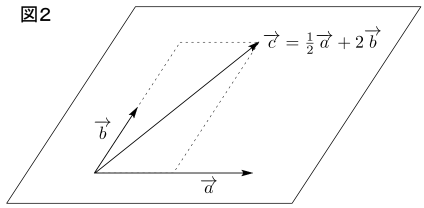


図2



*　　　　　　*　　　　　　*

「感じる」だけでは納得いかない人は以下を読んで下さい．まず言葉を定義します．

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \implies x = y = z = 0$$

が成り立つとき，

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{は一次独立である}$$

といいます．この言葉を使うと，上のモンダイは結局

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が同一平面上にない} \implies \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が一次独立}$$

が成り立つかどうかを確かめたい，と言い換えられます．これを証明してみましょう．

しかしながら，このままでは証明しづらいので，対偶をとって考えます：

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が一次独立でない} \implies \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が同一平面上にある}$$

以下，証明．

【証明】仮定より，$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が一次独立でないから，$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ において $x = y = z = 0$ 以外の $(x,\ y,\ z)$ が存在する．ここでは仮に $x \neq 0$ とする．すると，x は 0 でないから x で割ることができて，

$$x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{a} = -\frac{y}{x}\overrightarrow{b} - \frac{z}{x}\overrightarrow{c}$$

と変形することができる．$\overrightarrow{a}$ が，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ を伸び縮みさせたものの和[1]として表せる，ということは $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ が同一平面上のベクトルであるということに他ならない．（証明終）

*　　　　　　*　　　　　　*

[1] これを 1 次結合または線形結合といいます

ちなみに，

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が同一平面上にない} \implies \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が一次独立}$$

は逆も成り立ちます．すなわち，

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が同一平面上にない} \iff \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\text{が一次独立}$$

が成り立ちます．興味ある人は逆の証明もしてみてください．また，ここまでの話の次元を一つ下げると（平面ベクトルに戻すと），

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\text{が平行でない} \iff \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\text{が一次独立}$$

となります．証明は上と同様にしてできます．