グラフとは

難易度★☆☆☆☆（教科書レベル）

そもそも「グラフ」とは何でしょうか．まずはそこから確認しましょう．「グラフ」とは，関数（写像）f が与えられたとき，

$$\{(x,\ y) \mid x \in \text{定義域},\ y = f(x)\} = \{(x,\ f(x)) \mid x \in \text{定義域}\ \}$$

をいいます．パッと見良く分からないかもしれませんが，少なくとも**集合**であることは見て取れると思います．日本語に翻訳すると，

$$y = f(x)\ \text{をみたす点}\ (x,\ y)\ \text{の集合}$$

と表現できます．すなわち**グラフとは，$\boldsymbol{xy}$ 平面上に無数に存在する点 $\boldsymbol{(x,\ y)}$ のうち，とくに $\boldsymbol{(x,\ f(x))}$ という点の集まり**を指して呼ばれるもの，ということです．

$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ を例にとって考えてみましょう．$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ のグラフとは，上の定義によれば，

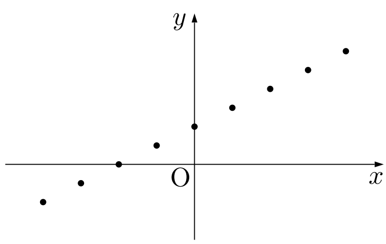
$$\{(x,\ f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x,\ \frac{1}{2}x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

つまり，$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}x + 1}$ **をみたす点 $\boldsymbol{(x,\ y)}$ の集合**ということですね．

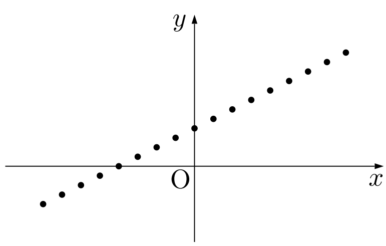
さて，$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ をみたす点には，例えばどんな点があるのか具体的に調べてみると，例えば，

$$\cdots,(-4,-1)\ ,(-3,-\frac{1}{2}),\ (-2,0),\ (-1,\frac{1}{2}),\ (0,1),\ (1,\ \frac{2}{3}),\ (2,\ 2),\cdots$$

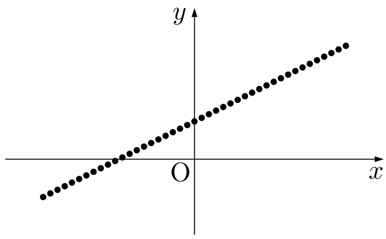
などがあります．これらを xy 平面上にプロットしてみましょう．



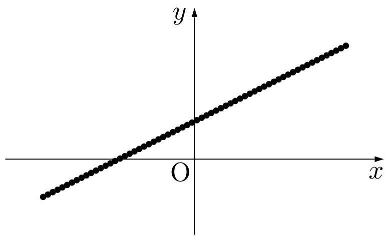
かなり粗い．$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ みたす点をもう少し細かく用意して，プロットしてみましょう．



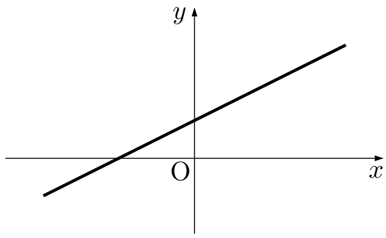
さらにプロットしていきます.



まだまだいくぜ.



やがて,



となります. この**点の集まり**が, 他ならぬ $y=\dfrac{1}{2}x+1$ の**グラフ**と呼ばれるものです. このように,「『グラフ』とは, $y=f(x)$ をみたす点の集まり」という認識を持つことがこの後の「平行移動の公式」の証明の起点となる重要な認識です.

グラフの定義

グラフとは, 写像 f に対する集合 $\{(x,\ f(x)) \mid x \in \text{定義域}\}$, すなわち

$y=f(x)$ をみたす点の集まり

である.

平行移動の公式

難易度★☆☆☆☆（教科書レベル）

教科書でお馴染み平行移動の公式を証明します．

平行移動の公式

グラフ $y=f(x)$ を，x 軸方向に $+p$，y 軸方向に $+q$ だけ平行移動したグラフは

$$y-q=f(x-p)$$

とかける．

この公式を初めて見たとき思いませんでしたか．「なんで $+p$ の平行移動なのに公式では $-p$ なんだろう？」と．その疑問の答えは証明の中にあります．やってみましょう．

さて，どう考えるか．グラフ $y=f(x)$ を「図形」と見なしてどうこう考えても埒が明かない．**何をすればよいか困ったので，とりあえず定義に戻って考えてみましょう**[1)]．

グラフ $y=f(x)$ を定義にかえって捉え直してみます．そうすると，グラフ $y=f(x)$ とは，集合

$$\{(s,\ f(s)) \mid s\in\mathbb{R}\}$$

であったことを思い出します．日本語に翻訳すれば，

点 $(s,\ f(s))$ の集まり (s は任意の実数)

ということでした．「集まり（集合）」であることを表現するために，「s は任意の実数」という一言を付け加えていることに注意（実際，s を自由に動かせば**あらゆる点**を表現しうる）．このように，グラフを「図形」として考えるのではなく，定義に従えば「点（の集まり）」と見なせることになります．図形丸ごとの平行移動だと我々の手に負えそうにないけれど，**点の平行移動ならば容易に考えられます．**点を移動させたければ，単に，それぞれの成分に平行移動させたいその量をそのまま加えればよいのだから．やってみましょう．

証明

グラフ $y=f(x)$ を，

点 $(s,\ f(s))$ の集まり (s は任意の実数)

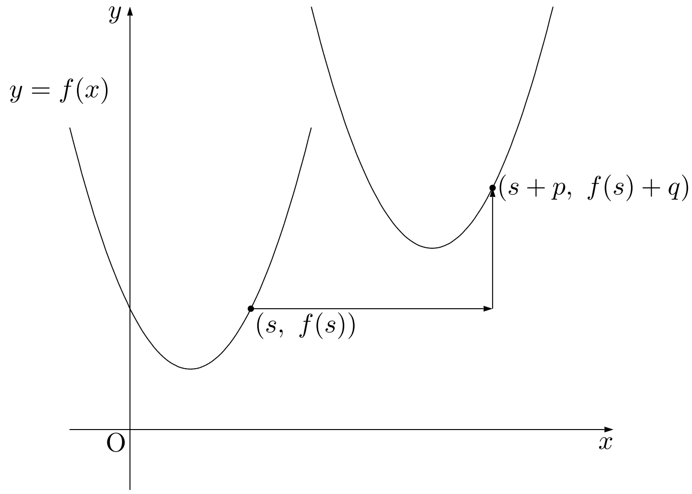
と見なす．

点 $(s,\ f(s))$ を x 軸方向に，y 軸方向にだけ平行移動させてみる．

$$(s,\ f(s))\ \longrightarrow\ (s+p,\ f(s)+q)$$

これを図示すると，以下のようになる．

1) これホント大事．単語が分からなかったら辞書を引く．ゲームをしてて進め方がわからなくなったらルールブック読む．数学で何すればよいか分からなくなったら定義に戻る．至極当たり前のこと．



ここで，平行移動後の点の座標

$$(s+p,\ f(s)+q)$$

の x 座標，y 座標をそれぞれ x，y とおくと，

$$\begin{cases} x = s+p \\ y = f(s)+q \end{cases} \qquad (s \text{ は任意の実数})$$

とかける[2)]．この 2 式から，s を消去すると，

$$s = x-p \quad \text{より} \quad y = f(x-p)+q$$

よって，

$$y-q = f(x-p)$$

が得られる． □

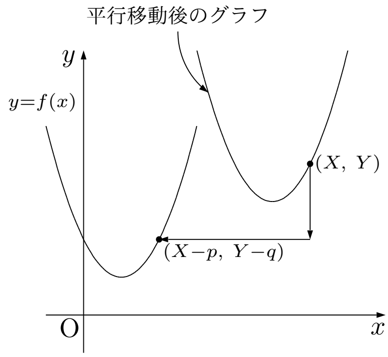
無事，目標の公式が得られたとともに，先程の「なぜ + 方向の平行移動が − として表示されるのか」という疑問が解決しました．めでたしめでたし．

また，この平行移動の公式の証明には次のような証明もあります（次ページ）．

[2)] これで媒介変数表示された軌跡の問題に帰着します．媒介変数表示された図形の軌跡は,「逆手流（逆像法）」と呼ばれる方法で求めるのが定石ですが，詳しい内容は割愛します（ブログ「逆手流」参照）．

証明

平行移動後のグラフ上の任意の点の座標を $(X,\ Y)$ とする．そうすると，目標は「X と Y の関係式」となる．今，x 軸方向に $+p$ だけ，y 軸方向に $+q$ だけ平行移動した結果，$(X,\ Y)$ という点に到達したのだから，$(X,\ Y)$ という点を逆に x 軸方向に $-p$ だけ，y 軸方向に $-q$ だけ平行移動した点 $(X-p,\ Y-q)$ は $y=f(x)$ 上にあることになる（右図参照）．$(X-p,\ Y-q)$ が $y=f(x)$ 上に存在するのだから，代入できて，



$$Y-q=f(X-p)$$

が得られる．これは他ならぬ目的の X と Y の関係式，すなわち平行移動後のグラフの方程式である．X を x に，Y を y に書き換えて，

$$y-q=f(x-p)$$

が得られる． □

移した先の点を $(X,\ Y)$ とおく $\longrightarrow$ 逆に，その点を戻す $\longrightarrow$ 戻した点は，元の図形上の点だから $\longrightarrow$ 代入できる

この証明の流れは至るところで[3]登場するので，覚えておくとよいでしょう．

[3]軌跡の方程式（数学 II），楕円から円への変換，図形の回転（数学 III）など．