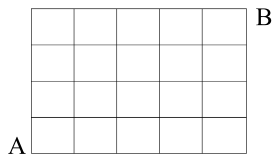
教科書では「順列」「組合せ」「重複順列」を学びました．この流れからいくと,「重複組合せ」というのもありそうです.

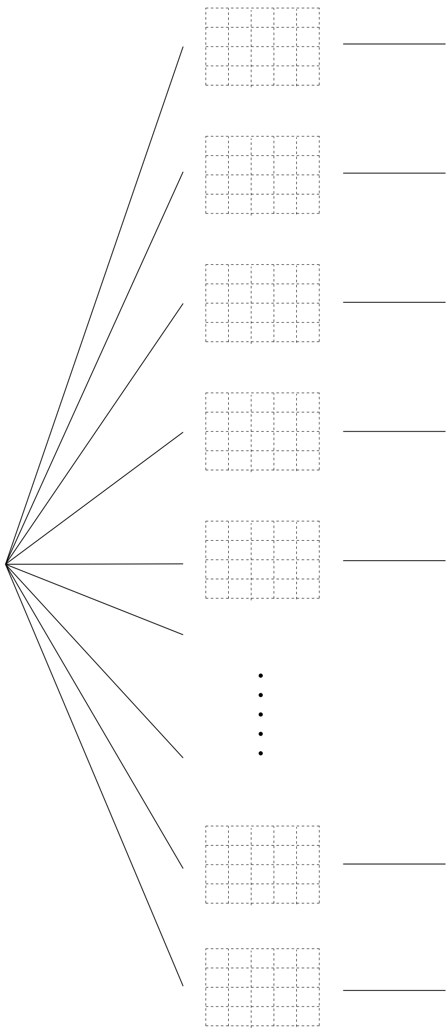
まずは次の問題から.

問題

右の図は，ある地域の道を直線で示したものである．交差点 A から交差点 B まで遠回りをしないで行く最短の道順は，何通りあるか.



やはり，樹形図をイメージしましょう．真っ先に頭に浮かぶアイデアは，単純に「経路の絵を（根性で）全部書き下す」というものでしょう．しかし，当然ながらそれは現実的ではありません．そこで，以下のように枝を書き加えてみます．★板書 1 ★



左側の枝と右側の枝が1対1に対応しているから，左側の枝を数えても，右側の枝を数えても同じことですね．であるならば，数えやすい右側の枝をカウントすればいいでしょう．なぜ右側の枝なら数えやすいのでしょうか？それは，右側の枝であれば，

$$4\text{つの}\uparrow,\ 5\text{つの}\rightarrow\text{の並び替え}$$

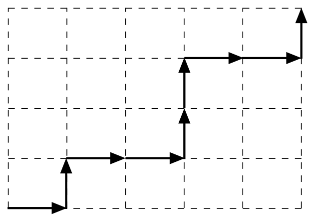
とみなしてカウントできるからです（前回やった「同じものを含む組合せ」！）したがって，

$$ {}_9C_4 \times {}_5C_5 \left(= \frac{9!}{4!5!}\right)$$

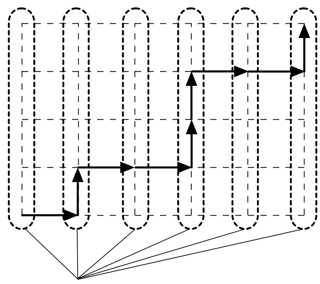
が求める答えとなります．

【重複組合せ】

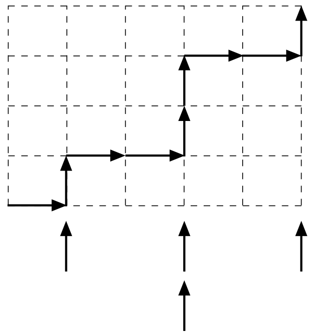
さて，前問題を別角度から考察してみます．今，例えば次のような道順があったとしましょう．



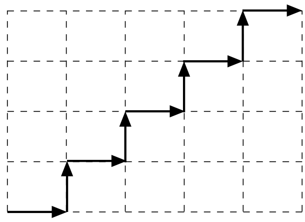
ここで，6つの縦の各路地において，上矢印↑が何個あるかに着目してみましょう．

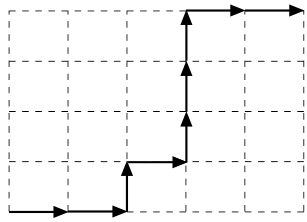


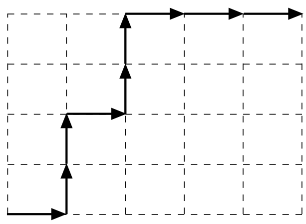
そして，各縦路地にあった上矢印↑を下図のように書き添えてみます．

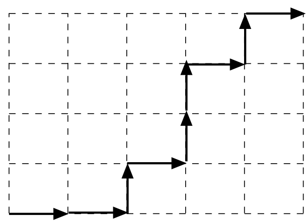


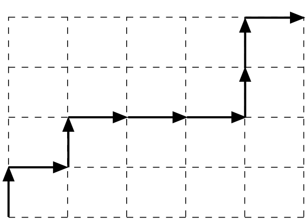
次の図において，同じように「縦の各路地において，上矢印↑が何個あるか」を調べ，その矢印を書き込んでみてください．★板書 2 ★

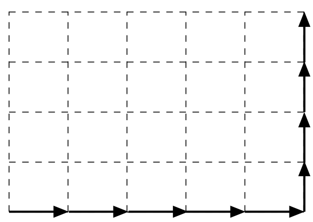












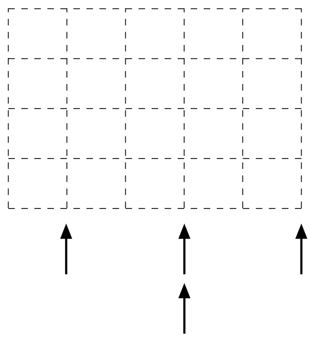
書いて貰えば容易に分かる通り，道順が与えられれば，各縦路地にある上矢印↑が特定できます（当たり前ですね）．では，**逆に**，各縦路地にある上矢印↑が与えられたとき，

そこから道順は特定できるでしょうか？次にこれについて考えてみましょう．

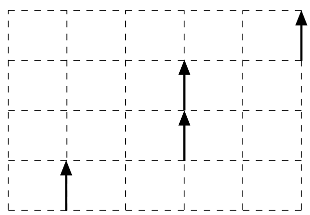
さて，今度は逆に，

縦の各路地において，上矢印 ↑ が何個あるか

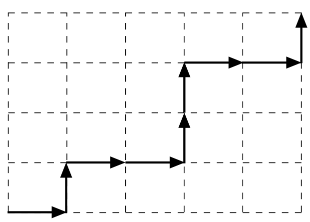
が分かれば，経路は再現できるか？すなわち，



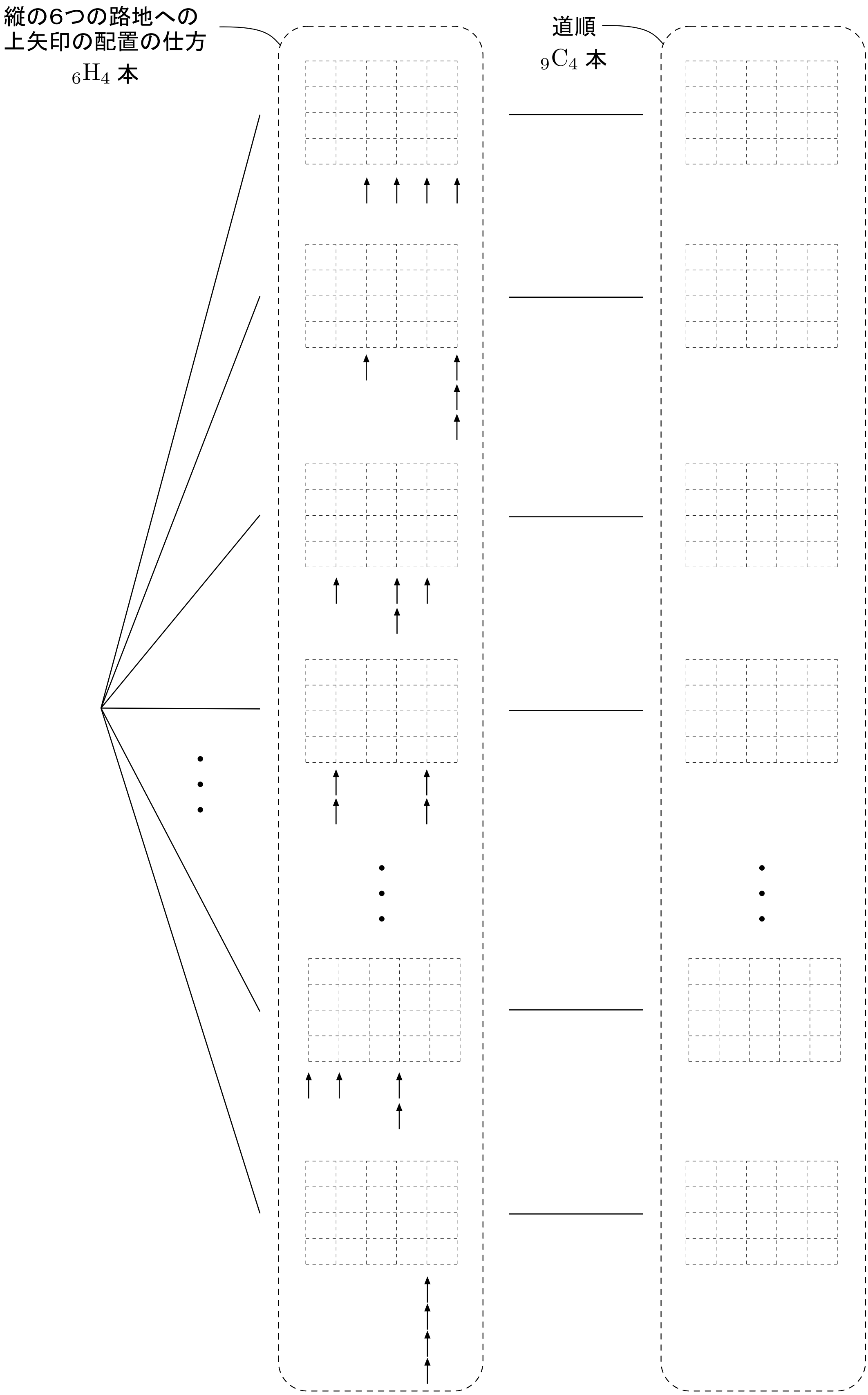
という状況が分かったとき，道順を描くことはできるか？ということを考えてみます．結論から言えば，できます．実際，上の状況が与えられれば，上矢印は，



と配置せざるを得ません（もし，これ以外の配置をしてしまったら，「最短経路」ではなくなってしまうからです．実際に書いて実験してみてください）．あとは，右矢印を書き込んで，



と道順が再現できます．これで，「縦の6つの各路地に上矢印↑が何個あるか」が分かれば，道順が再現できるということが分かりました．… ということは，もし，「縦の6つの各路地に上矢印↑が何個あるか」その配置の仕方の総数を求めることができれば，それは道順の総数を求めることができたということでもあります！よって，次のような樹形図が得られることになります．★板書 3 ★


縦の6つの路地への
上矢印の配置の仕方
$_6\mathrm{H}_4$ 本
道順
$_9\mathrm{C}_4$ 本

この「『縦の 6 つの各路地に上矢印↑が何個あるか』その配置の仕方の総数」すなわち

異なる 6 つの場所に，重複を許して矢印を（4 つ）配置する，その配置の仕方

のことを，

重複組合せ

とよび，記号

$${}_6\mathrm{H}_4$$

で表します．そして，前ページの樹形図で見たように「『縦の 6 つの各路地に，上矢印↑が何個あるか』その配置の仕方の総数」は道順の総数でもあったから（道順の総数は ${}_9\mathrm{C}_4$ であったことを思い出すと），

$${}_6\mathrm{H}_4 = {}_9\mathrm{C}_4$$

が成り立つことが分かります．さらに，${}_6\mathrm{H}_4$ の左下の 6 は「縦路地の本数」だったから，この 6 から 1 を引いた値 5 が右矢印の本数であり，4 は上矢印の本数だから，

$$(6-1)+4=9$$

という関係式が成り立つことが分かります．したがって，

$${}_6\mathrm{H}_4 = {}_9\mathrm{C}_4 = {}_{6+4-1}\mathrm{C}_4$$

と書けます．ここまでの議論を一般化しましょう．

n 個の場所に，重複を許して r 個のものを配置する．その配置の仕方は

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

で表される．

「n個の場所に，重複を許してr個のものを配置する．その配置の仕方」のイメージが大切です．それは 25 ページの樹形図の左側の枝のイメージ（矢印をダブりを許して配置するイメージ）です．そしてこの場合の数が，${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ という簡単な式で求めることができる，というのがこの公式の便利かつ強力なところです．また，C とは異なり，$n \leqq r$ であっても意味を持つことに注意しましょう．

確認問題

(1) 次の計算をせよ．

(i) ${}_6\mathrm{H}_4$　　(ii) ${}_5\mathrm{H}_3$　　(iii) ${}_3\mathrm{H}_5$　　(iv) ${}_4\mathrm{H}_7$

(2) りんご，みかん，なし，かきの 4 種類の果物がたくさんある．この中から 3 個選ぶとき，何通りの選び方があるか．ただし，1 つも選ばれない果物があってもよいとする．

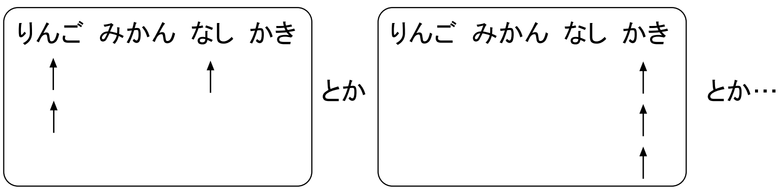
(3) $x+y+z=9,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか．

(4) $x+y+z=9,\ x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何組あるか．

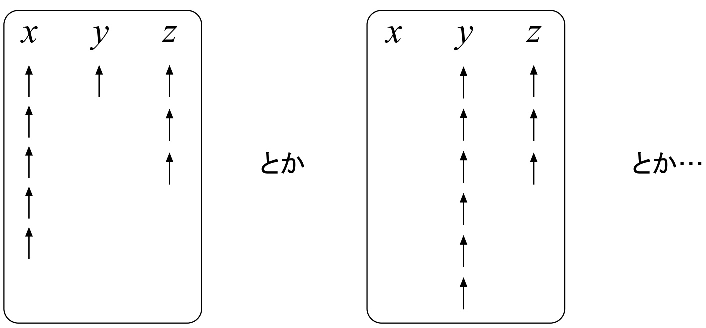
(5) りんご，みかん，なし，かきの 4 種類の果物がたくさんある．この中から 6 個選ぶとき，何通りの選び方があるか．ただし，どの果物も少なくとも 1 個は選ぶとする．

立式のイメージ

(2)「4つの場所（りんご，みかん，なし，かき）に（自分が選択する）矢印を3つ配置する」と考える．



(3)「3つの場所（x, y, z）に（1を表す）矢印を9つ配置する」と考える．



（解答　(1)126,35,21,120　(2)20　(3)55　(4)28　(5)10）