なぜ $0! = 1$ なのか

難易度★★☆☆☆（教科書レベル）

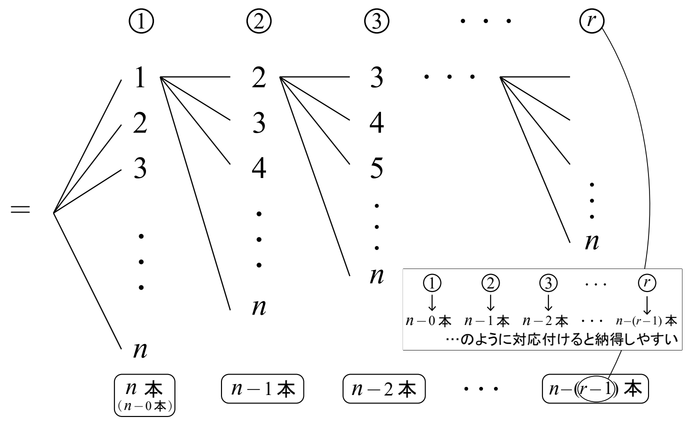
まず，各種公式の確認から．

順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$

$$ {}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) $$

$\boxed{\text{証明}}$

$$ {}_n\mathrm{P}_r = n \text{ 個のものから } r \text{ 個とって 1 列に並べたものの総数} $$



$$ \begin{aligned} &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1)) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \end{aligned} $$

（証明終）

順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

$\boxed{\text{証明}}$

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1)) \end{aligned} $$

ここで，$n!$ を出現させたいので，$(n-(r-1))$ の続きである $(n-r)(n-(r+1))\cdot\cdots 3\cdot2\cdot1$ をかける．もちろん，結果的に $\times1$ になるように $\times\frac{1}{(n-r)(n-(r+1))\cdot\cdots 3\cdot2\cdot1}$ もかけて，

$$ \begin{aligned} &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1)) \times \frac{(n-r)(n-(r+1))\cdot\cdots 3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-(r+1))\cdot\cdots 3\cdot2\cdot1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))(n-r)(n-(r+1))\cdot\cdots 3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-(r+1))\cdot\cdots 3\cdot2\cdot1} \end{aligned} $$

すると目論見通り，分子には $n!$ が出現する．分母もよく見ると $n-r$ までの連続数の積だから，$(n-r)!$ となる．したがって，

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

となる．

（証明終）

*　　　　*　　　　*

さて，

$${}_n\mathrm{P}_0 \quad や \quad 0!$$

がどんな値になるかを考えてみましょう.「n 個のものから『0 個』選んで云々 $\cdots$ 」「『0 個』をすべて並べたものだから云々 $\cdots$ 」などと考えても答えは決して得られません．なぜでしょうか．それは

${}_n\mathrm{P}_0$ と $0!$ に関しては何も決めていないから

です（上の公式は $r \geqq 1$ の自然数で定義された式です）．強いて答えを言うのであれば，「決めていない（定義していない）」以上，

「答えられない」が答え

ですね．ここで，次のように考えてみます．

何も決めていないのなら，適当に決めてやれば（定義すれば）いいじゃない

そうです.「何も決まっていない」のだから，我々が自由に決めて（定義して）やればいいんです[1]．$\cdots$ とはいえ，いざ「決める（定義する）」となると何を基準に決めればいいのか困りますね．しかし，どうせ「決める（定義する）」のなら，

後々役に立つように

決めてやりたいものです．ここで，先ほど証明した式

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

を眺めてみましょう．この式において，$n\mathrm{P}_0$ を出現させるために $r=0$ と代入してやりましょう．すると，

$${}_n\mathrm{P}_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

[1] 上で「適当に」と書きましたが，数学において「適当に」というのは,「うまく」とか「丁度よく選んで」とか「作為的に」といった意味です．日常で使う「適当に（何も考えずにいい加減に，無作為に）」とはニュアンスが違うことに注意してください．

となります．これは，仮に

$${}_n\mathrm{P}_0 = 1 \text{ と決める（定義する）}$$

と，公式 ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ は $r=0$ でも成り立つ式，と言えることを意味します．どうせ自由に決めてよいのなら，公式 ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ が $r=0$ のときでも成り立つように（より便利に，すなわち公式が**拡張されるように**）決めてやりましょう．というわけで，${}_n\mathrm{P}_0 = 1$ と決めることにします．

同様に，公式 ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ において，$0!$ が出現するように $r=n$ と代入してやりましょう．すると，

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_n &= \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \\ \therefore \quad n! &= \frac{n!}{0!} \end{aligned}$$

ここでもし，

$$0! = 1$$

であれば，公式 ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ は $r=n$ のときも成り立つ式，と言えることになります．どうせ自由に決めてよいのなら，公式 ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ が $r=n$ のときも成り立つように決めてやりましょう．すなわち，

$$0! = 1 \text{ と決めて（定義して）}$$

やりましょう．

*　　　*　　　*

このように，今後学んでいく数学ではしばしば「何も決まっていないのだから，これからそれを決めよう（定義しよう）」という場面に出会います[2]．その際，今回と同様，

既存の公式（や定義）がより汎用性のあるものになるように（拡張されるように）

という姿勢で決めて（定義して）いくことになります．

[2] 三角比の拡張，指数法則の拡張，複素数など ⋯