斜交座標系

難易度★★★☆☆（受験基礎レベル）

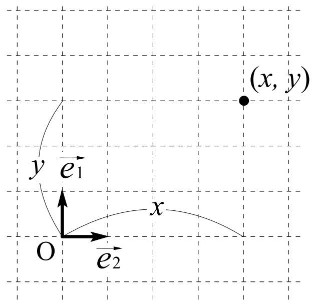
突然ですが，$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ とし，

$$x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$$

で表される点を視覚的に考察してみます．まず注目してもらいたいのは次の点です．

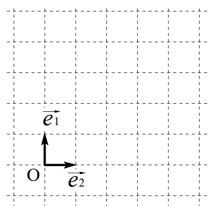
- $\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ はどちらも大きさが 1 で，互いに直交している
- $\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ の係数は，いわば $\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ がそれぞれ何個分かを表している

これらのことから，$x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ について以下のような絵が描けることがわかるでしょう．



このように捉えると，$x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ の係数 x，y は，$\overrightarrow{e_1}$と$\overrightarrow{e_2}$をそれぞれ1目盛りとした座標系における位置を表している，とみなせることがわかります．

$x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ が指し示す点 $=$



という座標系における $(x,\ y)$

ちょっと練習してみましょう．

確認問題 次のベクトルが表す点を図示せよ．

(1) $3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$

(2) $4\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}$

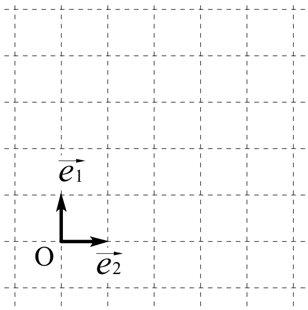
(3) $2\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$y$ は任意の実数

(4) $x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$x+y=1$

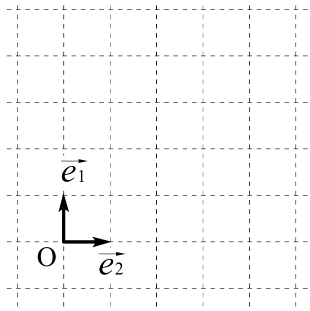
(5) $x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$y\leqq -x+3$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

(6) $x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$y\leqq -x+3$，$x\leqq 2$，$y\leqq 2$

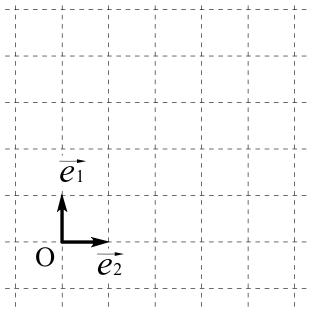
(1) $3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$ が指し示す点は，★板書 1 ★



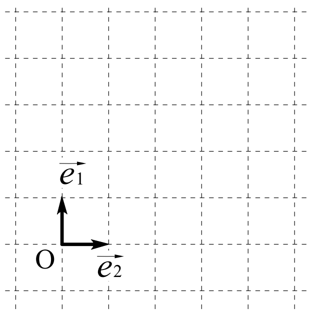
(2) $4\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}$ が指し示す点は，★板書 2 ★



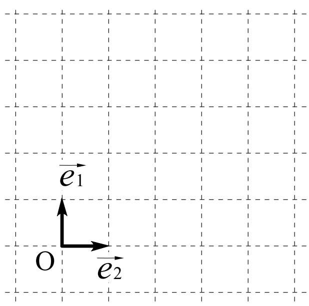
(3) $2\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ (y は任意の実数) が指し示す点を図示してみましょう．今度は，$\overrightarrow{e_1}$ の係数は定数 2 ですが，$\overrightarrow{e_2}$ の係数が定数でなく変数 y で，さらにそれが「任意の」すなわち「自由に動く」と言っています．したがって，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$がつくる座標系において,x座標は2で固定されつつy座標は自由に動きますから，結果右図のように直線を描くことになります．★板書 3 ★



(4) $x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$x+y=1$ が指し示す点を図示してみます．今度は，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ の係数がどちらも変数 x，y で，さらにその変数 x，y の間には $x+y=1$ なる関係が成り立つ，と言っています．したがって，求める点は，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$がつくる座標系において,$x+y=1$のグラフを描けばよい，と分かります．★板書 4 ★



(5) $x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$y \leqq -x+3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ はどうでしょうか．$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ の係数 x，y の間に $y \leqq -x+3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ なる関係があります．したがって，求める領域（数学 II『不等式の表す領域』参照）は，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$がつくる座標系において,$y \leqq -x+3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$が示す領域を描けばよい，と分かります．(6) も同様です．★板書 5 ★



先ほどの話は，いわば，$\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ というベクトルを“基準[1]”とした“方眼紙”を考え，$x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$ の係数 x, y をその“方眼紙”における位置，と見なしたわけです．ここで，次の問題を考えてみます．

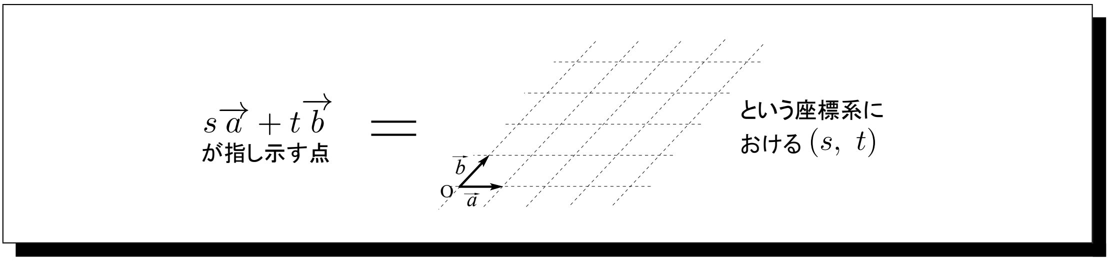
問題

$\triangle$OAB に対して（$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする），点 P が

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad 0\leqq s+t\leqq 1,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$

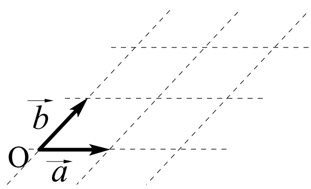
を満たしながら動くとき，点 P($\vec{p}$) の存在範囲を求めよ．

これを次のように考えてみます：先ほどは $\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ というベクトルを“基準”とした“方眼紙”を考えましたが，今度は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ というベクトルを“基準”とした“斜めに歪んだ方眼紙”を考え，$s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ の係数 s, t をその座標系における位置，とみなして考えればいいのでは？と．



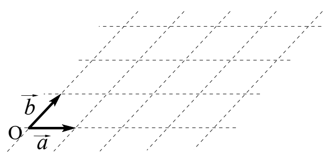
このように考えると，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$, $0\leqq s+t\leqq 1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ が指し示す点というのは，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ というベクトルを“基準”とした“斜めに歪んだ方眼紙[2]”において，$0\leqq s+t\leqq 1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$（すなわち $t\geqq -s$, $t\leqq -s+1$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$）を満たす領域，と捉えられることが分かります．

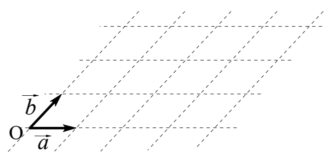
★板書 6 ★

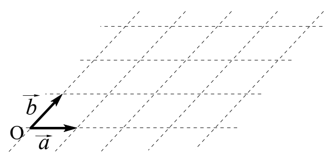


授業では大分面倒な議論のもとにこの問題を解きましたが，このように「“斜めに歪んだ方眼紙（斜交座標系）”における点」とみなすと直観的に存在範囲が分かります．

確認問題 教科書 P40 問 14，練習 30（数研出版）を上の考え方で解いて，授業での解法の結果と一致することを確認せよ．







[1] これを「基底」といいます
[2] これを「斜交座標系」と呼びます．