二項定理

（数 II）難易度★☆☆☆☆

二項定理を「覚えて」いませんか．二項定理（に限らずですが）において重要なのは，結果よりもその導出の過程です．機械的な暗記は忘れやすいだけでなく，応用も効かず，まさに百害あって一利なし．二項定理を理解するにあたって，そもそも「展開」というとはどのような操作だったか，そこを見直してみましょう．

中学校以来，展開は以下のように行ってきたことと思います．

$$(a+b)\quad(x+y) = \overset{①}{ax} + \overset{②}{ay} + \underset{③}{bx} + \underset{④}{by}$$

ここで，この展開という操作を少し違った視点で捉えなおすことにします：展開を上のような手順を追った操作として捉えるのではなく，

> **各因数の中の文字（数）から代表を一つずつ選び出し，その選び出された代表同士をかけ合わせたものの総和**

と捉え直します．

例 1 $(a+b)^2$ の展開

ここに，$(a+b)^2$，すなわち $(a+b)$ と $(a+b)$ の二つの因数があるとします．まず，この二つの因数からそれぞれ a と b どちらか一方の文字を選出したのち掛け算を行います．選出の仕方は一通りではないことに注意すると，

$$\begin{array}{cccl}
(a+b)^2 = & (a+b) & (a+b) & \\
 & a & a & = a^2 \\
 & a & b & = ab \\
 & b & a & = ba \\
 & b & b & = b^2
\end{array}$$

となり，計算の結果，a^2, ab, ba, b^2 という項が得られます．そして，これらをすべてたし加えることで $a^2+2ab+b^2$ を得る．この結果は確かに中学校以来行っている展開公式と一致しています．

例 2 $(a+b)^3$ の展開

同様に考え，

$$
\begin{array}{cccccc}
(a+b)^2 = & (a+b) & (a+b) & (a+b) & \\
 & a & a & a & = a^2 \\
 & a & a & b & = a^2b \\
 & a & b & a & = a^2b \\
 & b & a & a & = a^2b \\
 & a & b & b & = ab^2 \\
 & b & a & b & = ab^2 \\
 & b & b & a & = ab^2 \\
 & b & b & b & = b^3
\end{array}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3 \\
=&a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

この結果も確かに，$(a+b)^3$ の展開公式と一致していますね．$(a+b)^4$，$(a+b)^5$，$\cdots$ も同様です（$(a+b)^4$ の展開も実際に行ってみましょう．面倒ですが，次の一般の場合の理解の大きな助けになります）．

さて，今度は一般の場合，すなわち $(a+b)^n$ の展開を考えてみます．次数が n になってもやるべきことはやはり同じ．まずは各因数からの「代表の選出」ですが，しかしやみくもに選出しても重複・数え漏らしが起きそうなので，ここでは**選出される a の個数で場合分け**して選出を考えることにします．

まず，選出されるの a の個数が 0 個のとき．これは簡単ですね．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(a+b)^n = & (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) & (a+b) & \\
 & b & b & b & b & \cdots & b & b & = b^n
\end{array}
$$

次に，選出される a の個数が 1 個のとき．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(a+b)^n = & (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) & (a+b) & \\
 & a & b & b & b & \cdots & b & b & = ab^{n-1} \\
 & b & a & b & b & \cdots & b & b & = ab^{n-1} \\
 & b & b & a & b & \cdots & b & b & = ab^{n-1} \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & b & b & b & b & \cdots & a & b & = ab^{n-1} \\
 & b & b & b & b & \cdots & b & a & = ab^{n-1}
\end{array}
$$

…のような選出のされ方があります．したがって，

$$ab^{n-1}+ab^{n-1}+ab^{n-1}+\cdots+ab^{n-1}$$

を計算すればよいことになります．問題はこの ab^{n-1} という項が全部で何個あるのか？ということですが，これは，上の「各因数から a または b を 1 人選出する」という操作において，

「n 個の因数のうちどの因数から a が選出されるか」通り

だけ項数が現れると考えればよいでしょう．そうすれば，求める項数は，${}_n\mathrm{C}_1\ (=n)$ 個と直ちにわかります．したがって，

$$ab^{n-1}+ab^{n-1}+ab^{n-1}+\cdots+ab^{n-1}=ab^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1={}_n\mathrm{C}_1ab^{n-1}$$

とかける．

引き続き，選出される a の個数が 2 個のときを考えてみます．

$$\begin{array}{cccccccccc}
(a+b)^n= & (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) & (a+b) & \\
 & \color{red}{a} & \color{red}{a} & b & b & \cdots & b & b & =a^2b^{n-2}\\
 & \color{red}{a} & b & \color{red}{a} & b & \cdots & b & b & =a^2b^{n-2}\\
 & \color{red}{a} & b & b & \color{red}{a} & \cdots & b & b & =a^2b^{n-2}\\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
 & b & b & b & b & \cdots & b & \color{red}{a} & =a^2b^{n-2}\\
 & b & b & b & b & \cdots & \color{red}{a} & \color{red}{a} & =a^2b^{n-2}
\end{array}$$

項数は，先ほどと同様に「n 個の因数のうちどの因数から 2 個の a が選出されるか」通り，すなわち ${}_n\mathrm{C}_2$ 通りだけあると考え，求める総和は

$$a^2b^{n-2}+a^2b^{n-2}+a^2b^{n-2}+\ \cdots\ +a^2b^{n-2}=a^2b^{n-2}\times{}_n\mathrm{C}_2={}_n\mathrm{C}_2a^2b^{n-1}$$

と書けます．

以上の操作を繰り返すと，やがて選出される a の個数が，…$n-2$ 個，$n-1$ 個，そして n 個まで行きつきます．

（選出されるの a の個数が $n-1$ 個のとき）

$$\begin{array}{cccccccccc}
(a+b)^n= & (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) & (a+b) & \\
 & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \cdots & \color{red}{a} & b & =a^{n-1}b\\
 & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \cdots & b & \color{red}{a} & =a^{n-1}b\\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
 & \color{red}{a} & b & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \cdots & \color{red}{a} & \color{red}{a} & =a^{n-1}b\\
 & b & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \cdots & \color{red}{a} & \color{red}{a} & =a^{n-1}b
\end{array}$$

$$\therefore a^{n-1}b + a^{n-1}b + a^{n-1}b + \ \cdots \ + a^{n-1}b = a^{n-1}b \times {}_n\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_{n-1}a^{n-1}b$$

（選出されるの a の個数が n 個のとき）

$$\begin{array}{cccccccccc} (a+b)^n = & (a+b) & (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) & (a+b) & \\ & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \color{red}{a} & \cdots & \color{red}{a} & \color{red}{a} & = a^n b^0 \end{array}$$

以上をすべてをたし加えることで，

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^0 b^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^1 b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 a^1 b^{n-2} + \ \cdots \ + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^{n-1} b^1 + {}_n\mathrm{C}_n a^n b^0$$

となり，目的の展開式を得る．

ここまでの「頭のうごき」をまとめます（次ページ）．

頭の動き：

$(a+b)^n(=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\ \cdots\ (a+b))$ を展開しよう．
展開とは,「各因数から代表を一人ずつ選出して，かけて，すべてたし加えたもの」だった．
では，各因数から a を 0 個選出したときは，どのような項が出現するだろう？
a^0b^n
そんな a 出現の仕方は $1(={}_n\mathrm{C}_0)$ 通りあるから…
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0$
じゃあ，各因数から a を 1 個選出したときは，どのような項が出現するだろう？
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}$
そんな出現の仕方は ${}_n\mathrm{C}_1$ 通りあるから…
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1$
じゃあ，各因数から a を 2 個選出したときは，どのような項が出現するだろう？
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1+a^2b^{n-2}$
そんな出現の仕方は ${}_n\mathrm{C}_2$ 通りあるから…
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1+a^2b^{n-2}\times{}_n\mathrm{C}_2$

$$\vdots$$

じゃあ，各因数から a を $n-1$ 個選出したときは，どのような項が出現するだろう？
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1+a^2b^{n-2}\times{}_n\mathrm{C}_2+\ \cdots\ +a^{n-1}b^1$
そんな出現の仕方は ${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ 通りあるから…
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1+a^2b^{n-2}\times{}_n\mathrm{C}_2+\ \cdots\ +a^{n-1}b^1\times{}_n\mathrm{C}_{n-1}$
最後に，各因数から a を n 個選出したときは，どのような項が出現するだろう？
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1+a^2b^{n-2}\times{}_n\mathrm{C}_2+\ \cdots\ +a^{n-1}b^1\times{}_n\mathrm{C}_{n-1}+a^nb^0$
そんな出現の仕方は $1(={}_n\mathrm{C}_n)$ 通りあるから…
$a^0b^n\times{}_n\mathrm{C}_0+a^1b^{n-1}\times{}_n\mathrm{C}_1+a^2b^{n-2}\times{}_n\mathrm{C}_2+\ \cdots\ +a^{n-1}b^1\times{}_n\mathrm{C}_{n-1}+a^nb^0\times{}_n\mathrm{C}_n$

こうして，二項定理の「公式」が手に入ります．二項定理を運用する際は，このように，公式を覚えて機械的に処理するのではなく，意味を考えながら作ることが重要です：

* * *

二項定理がどのように導かれるかを理解しておけば，次のような多項定理の理解・導出も容易です．

$$(a+b+c)^n = \frac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r,\quad \text{ただし } p+q+r=n$$

この定理を用いた代表的な問題として，次のような問題があります．

例題

$(1+2x-x^2)^5$ の展開式における x^3 の係数を求めよ．

係数を求めればいいのだから，単純に，与式を実際に展開すれば終わりですね．しかし，聞かれているのはという項（の係数）のみですから，ピンポイントで目的の項だけを調べることにします．ここで,「展開」の意味，すなわち,「目的の項を出現させるためには，どのように『選出』されればよいだろうか？」と考えることにします．すると，

$$\begin{aligned}&(1+2x+(-x)^2)^{10}\\=&(1+2x+(-x)^2)(1+2x+(-x)^2)(1+2x+(-x)^2)\cdots(1+2x+(-x)^2)\end{aligned}$$

の各因数から，代表として

(i) $-x^2$ を 0 個，$2x$ を 3 個，1 を 7 個，または，(ii) $-x^2$ を 1 個，$2x$ を 1 個，1 を 8 個

選出してやればよいことは容易にわかります（$-x^2$ を 2 個以上選出してしまうと 2 個選出した時点で 4 乗になってしまい，目的の項にはなり得なくなるから）．ここでは例えば (ii) の場合について考えてみます．最初の因数から $-x^2$ が選出され，次の 2 つの因数から $2x$ が選出され，残りの因数から 1 が 7 つ選出されれば，目的の項が出現します．

$$\begin{array}{cccccc}(1+2x+(-x)^2)&(1+2x+(-x)^2)&(1+2x+(-x)^2)&\cdots&(1+2x+(-x)^2)&\\ -x^2&2x&1&\cdots&1&=(-x^2)^1(2x)^1 1^8\end{array}$$

しかし，選出のされ方は当然，こんな行儀のよい選出のされ方だけではありませんね．他にもいろいろあります．それは何通りかというと，

「10 つの因数のうち，どこから $-x^2$ が 1 つ，$2x$ が 1 つ，1 が 8 つ選出されるか」通り

すなわち，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_8$$

通りですね．したがって，

$$(-x^2)^1(2x)^1 1^8\times{}_{10}\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_8$$

と求まり，(ii) の場合の係数はと -180 と分かります．(i) の場合も同様に考えると，その係数は 960．(i) と (ii) をたし加えることで，結局，求める係数は 780 と求まります．

*　　　　*　　　　*

ここで，前出の「公式を使う」という思考は全く必要としていないことに注目してください．**公式を覚える必要などない**ということです！大切なのはその導出過程です．実際，この問題もその導出過程，すなわち「展開」とはそもそもどういう操作であるか，その性質に立ち戻ることで必然的に答えに辿り着きました．