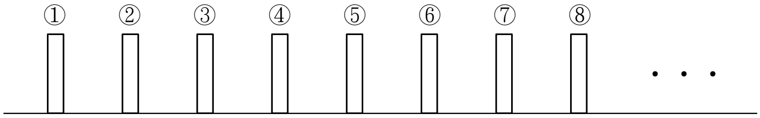
数学的帰納法とは

難易度★☆☆☆☆

均一な床面上に，重さと形の等しい将棋の駒[*1]が，等間隔に，果てしなく並んでいるとしましょう．



ここで質問．駒をすべて倒すにはどうしたら良いでしょうか．最初の駒さえ倒せばあとは全部倒れる？本当に？例えば，次のようなケースは考えられないでしょうか．

- 駒同士の間隔が広過ぎて，前の駒が倒れても次の駒に当たらず倒れない
- 駒が厚くて，前の駒が倒れても次の駒がうまく倒れない
- 床が粘着質で，前の駒が倒れても次の駒がうまく倒れない , etc.

駒を全部倒すには，このようなことがないこと，つまり，

前の駒が倒れれば，次の駒も確かに倒れる[*2]　$\cdots\cdots(*)$

ことを確認しなければなりません．もし，このことが確認できれば，

①の駒を実際に倒す

$\downarrow$

①の駒が倒れることになるので，$(*)$ より,[*3]　②の駒が倒れると言える

$\downarrow$

②の駒が倒れることになるので，$(*)$ より，③の駒が倒れると言える

$\downarrow$

③の駒が倒れることになるので，$(*)$ より，④の駒が倒れると言える

$\downarrow$

④の駒が倒れることになるので，$(*)$ より，⑤の駒が倒れると言える

$\downarrow$

$\vdots$

[*1] 実際の将棋の駒は，駒の種類によって形が微妙に異なるりますが，ここでは歩だろうと玉将だろうとすべて同じ形だとします．
[*2] 論理記号を用いて書けば,「前の駒が倒れる $\Rightarrow$ 次の駒が倒れる」
[*3] $(*)$ を根拠にしていることがポイント

このようにして，すべての駒が連鎖的に倒れるであろうことが分かります．さて，すべてのコマが倒れることを確認するために，今私達がしたことをまとめてみましょう。それは

(I) 前の駒が倒れれば，次の駒も倒れることの確認　　(II) 最初の駒を実際に倒す

という二つの作業でした．これが数学的帰納法の原理です．

*　　*　　*

では，早速この原理を実際の証明に応用してみましょう．

問題

すべての自然数 n に対し,[*4]

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad (**)$$

であることを数学的帰納法を用いて[*5]示せ．

与式が「すべての自然数で」成り立つとはどういうことでしょうか？まずそれを把握することからはじめましょう．

- $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} 左辺 &= 1 \\ 右辺 &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1 \end{aligned}$$

$\therefore n=1$ のとき $(**)$ は成り立つ

- $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} 左辺 &= 1+2=3 \\ 右辺 &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+1)=3 \end{aligned}$$

$\therefore n=2$ のとき $(**)$ は成り立つ

- $n=3$ のとき

$$\begin{aligned} 左辺 &= 1+2+3=6 \\ 右辺 &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3+1)=6 \end{aligned}$$

$\therefore n=3$ のとき $(**)$ は成り立つ

- $n=4$ のとき

$$\begin{aligned} 左辺 &= 1+2+3+4=10 \\ 右辺 &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4+1)=10 \end{aligned}$$

$\therefore n=4$ のとき $(**)$ は成り立つ

- $n=5$ のとき

$$\begin{aligned} 左辺 &= 1+2+3+4+5=15 \\ 右辺 &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot(5+1)=15 \end{aligned}$$

$\therefore n=5$ のとき $(**)$ は成り立つ

[*4] 教科書には書いていないが，この一言が省略されていると思ってよい．

- $n=6$ のとき

$$\text{左辺}=1+2+3+4+5+6=21$$
$$\text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(6+1)=21 \qquad \therefore n=6 \text{ のとき } (**) \text{ は成り立つ}$$

$$\vdots$$

このように「すべての自然数で $(**)$ が成り立つ」ことを示すには，この作業を永遠と繰り返せばよいが，実際にはそのようなことは物理的に不可能です．そこで先程のアイデア：

前の駒が倒れれば，次の駒が倒れる

すなわち

前の番号 n における $(**)$ 式が成り立てば，次の番号 n における $(**)$ 式が成り立つ (1)

ということを確認（証明）したのち，

最初の駒（最初の番号 n における $(**)$ 式）を実際に倒す (2)

ことですべての駒を倒す，という作戦[*6]で攻めることにします．まず，(1) を数学の言葉で“翻訳”しましょう.「前の番号」とその「次の番号」という関係は，k という文字を用いて「k 番（$n=k$）」に対して「$k+1$ 番（$n=k+1$）」と表現できます．そして,「倒れれば」の「ば」は論理記号を用いて書き直すと「$\Rightarrow$」です．したがって，(1) は

$$n=k \text{ で } (**) \text{ が成り立つ} \Rightarrow n=k+1 \text{ で } (**) \text{ が成り立つ} \tag{1$'$}$$

と翻訳できます.
さらに具体化していきます.
「$n=k$ で $(**)$ が成り立つ」とは，はじめに確認したように，

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1) \text{ が成り立つ}$$

ということでした．同様に,「$n=k+1$ で $(**)$ が成り立つ」とは，

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\} \text{ が成り立つ}$$

ということです．したがって，改めて $(1)'$ を“翻訳”すると，

$$\begin{aligned} &1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1) \\ \Longrightarrow\ &1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\} \end{aligned} \tag{1$''$}$$

ということになります．この命題 $(1)''$ の真偽を調べる作業こそが，先の例の「駒同士の間隔，駒の厚さ，床の状態などを調べて前の駒が倒れたら次の駒も確実に倒れてくれるかの調査」に対応する行為と言えます.

[*6] この作戦こそ前述した数学的帰納法です.

*　　*　　*

ここで復習．一般に，命題

$$A \Rightarrow B$$

はどのように証明したか覚えていますか？これは，平たく言えば仮定 A だけを手掛かりにして，結論 B を導く，ということでした．注意したいのは，A は“仮定”なので既知のものとしてよい（自由に使ってよい！）が，結論 B は示すべきいわば目標であるから，原則として触れてはいけないということでした．あくまで A **だけ**を根拠にして，B を導かなくてはならないのでした．[*7]

*　　*　　*

閑話休題．(1)″ を証明しましょう．
今手元にある式は仮定の式，つまり，

$$\boldsymbol{1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)}$$

だけ．これだけを根拠にして，結論の式

$$\boldsymbol{1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}}$$

を示さねばなりません．そこで 2 式を見比べてみると，左辺同士がよく似ていることに気付きます．違いは $k+1$ という項の有無だけ．ここに目をつけます．結論の式の左辺を実現するために，とりあえず手元の仮定の式 $1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ の両辺に $k+1$ を加えてみましょう．すると

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) &&\text{とりあえず左辺は実現}\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2) &&\text{右辺も計算を進めると…}\\&=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\} &&\text{目標の式の右辺が現れる！}\end{aligned}$$

これで (1)″ すなわち (1) が，仮定の式だけを根拠にして示せました．あとは (2) の作業：最初の駒を実際に倒せばよいわけです．もうやってるけど念の為もう一度．

$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}&\text{左辺}=1\\&\text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1 \qquad \therefore n=1\text{ のとき }(**)\text{ は成り立つ}\end{aligned}$$

これで，すべての駒が連鎖的に倒れることになり，自信をもって「すべての自然数 n に対し，$(**)$ が成り立つ」宣言できるわけです．

[*7] $A \Rightarrow B$ の証明には，実際的には 2 通りの方針がある．1 つ目は，ここで説明した通り，A そのものを起点として変形を施し，直接的に B を導く方針．そして 2 つ目は，B **式の左辺 or 右辺 or 左辺 − 右辺などから出発し**，その途中過程において，A **を変形の“道具”として使用する**ことで，B そのものを証明する方針．「B には触れてはいけないってさっき言ったのでは」と思った人．触れてませんよ．触ったのは左辺や右辺や左辺 − 右辺であって，B の等号 (=) や不等号 (≧, ≦) にはノータッチです．ここでいう式に「触る」とはそういうことです．